

2022-2023 учебный год


**К У Б О К
ГАГАРИНА**
олимпиада школьников

МАТЕМАТИКА

ОТВЕТЫ РЭ-2023

6 класс

Максимальное количество баллов за задания:

1	2	3	4	5	6	7	8	Сумма
4	4	4	4	5	5	5	5	36

1. Максимально 4 балла.

9 шестиклассников

Из условия следует, что у пятерых шестиклассников есть ручка, у семи – линейка и у девяти – карандаш. Таким образом, обладать хотя бы одним предметом могут не более чем $5 + 7 + 9 = 21$ человека. А значит, не менее чем $30 - 21 = 9$ человек потеряли все три предмета.

Все три предмета потеряют ровно 9 человек, если каждый из остальных двадцати одного потеряет ровно два предмета.

2. Максимально 4 балла.

3, 4 и 9

Возьмём, например, гири веса 3, 4 и 9 кг:

$$\begin{aligned}
 1 &= 4 - 3, & 2 &= 9 - 3 - 4, & 5 &= 9 - 4, & 6 &= 9 - 3, \\
 7 &= 3 + 4, & 8 &= 3 + 9 - 4, & 10 &= 4 + 9 - 3.
 \end{aligned}$$

3. Максимально 4 балла.

Первым ходил Арлекин, он и выиграл.

Заметим, что при делении на 7 количество спичек, взятых Арлекином, даёт остаток 5, а количество спичек, взятых Пьеро, даёт остаток 2. Число 2023 кратно 7, поэтому после каждого хода игрока, ходившего вторым, количество оставшихся спичек также будет кратно 7.

Так как на столе осталось две спички, то последним ходом было взято число спичек, дающее при делении на 7 остаток 5. Значит, последний ход сделал Арлекин и выиграл.

Все ходы, кроме последнего, разбиваются на пары, в которых общее количество взятых спичек кратно 7, поэтому первый ход также сделал Арлекин.

4. Максимально 4 балла.

Команды в порядке занятых мест: Д, Б, В, Г, А

Из 1) следует, что возможны два случая.

1. Д заняла 1-е место. Тогда из 3) следует, что В заняла 3-е место, далее из 5) следует, что А заняла не 2-ое место, а тогда из 2) следует, что у Г – 4-е место. Для А и Б остались места 2-е и 5-е, следовательно у А – 5-е место.
2. В заняла 2-е место. Тогда в прогнозе 5) нет верных предположений. Противоречие.

5. Максимально 5 баллов.

Не сможет Сумма чисел в каждом ряду квадрата должна быть равна

$$(1 + 2 + \dots + 15 + 16) : 4 = 34.$$

Рассмотрим два случая:

- 1) Пусть Лёша поставил числа 2 и 3 в одну горизонталь или в одну вертикаль с числом 1. Тогда в этом ряду осталась одна свободная клетка, куда необходимо поставить $34 - (1 + 2 + 3) = 28$. Но такого числа в этом магическом квадрате быть не может.
- 2) Пусть Лёша поставил одно из этих чисел в одну горизонталь с числом 1, а другое – в одну вертикаль. Тогда в том ряду, где стоит 2, сумма чисел в оставшихся клетках равна $34 - (1 + 2) = 31$. Значит, в этом ряду обязаны стоять числа 15 и 16. Но в том ряду, где стоит 3, сумма чисел в оставшихся клетках равна $34 - (1 + 3) = 30$. Значит, там обязаны стоять числа 16 и 14. Но число 16 невозможно поставить в оба ряда, так как на их пересечении уже стоит 1. Следовательно, Ваня не сможет составить магический квадрат.

6. Максимально 5 баллов.

Занумеруем яблоки. Взвесим первое яблоко со вторым, второе с третьим и третье с первым, затем сложим полученные веса и получим удвоенный вес трёх яблок. Итак, за три взвешивания мы узнали суммарный вес первых трёх яблок. Осталось четыре взвешивания и восемь яблок, которые взвешиваем попарно. Суммируя все данные, получим вес 11 яблок.

7. Максимально 5 баллов.

Нет Пусть мы нашли требуемый набор карточек, и сумма чисел, записанных на них, равна $S=2\dots 2$ (в записи k двоек). Понятно, что наибольшее из написанных на карточках чисел имеет не более k знаков.

Каждое из написанных на карточках чисел увеличим на единицу. Полученные числа будут начинаться с цифры 2, а все остальные цифры будут нулями (или отсутствовать). Запись суммы таких чисел состоит из 2 и 0 и содержит не более k цифр, поскольку в записи каждого из них различное количество цифр, а двойка встречается только в старшем разряде. Таким образом, получится сумма не больше S . Мы каждое слагаемое увеличили на 1, но сумма при этом не увеличилась. Такое невозможно. Следовательно, требуемого набора карточек не существует.

8. Максимально 5 баллов.

Если предложено меньше пяти задач, то увеличим их количество до пяти при этом условия задачи будут по-прежнему выполняться, так как добавленные задачи никто не решил. Из 5 задач можно составить $(5 * 4 * 3) / (3 * 2 * 1) = 10$ различных наборов по три задачи (см. таблицу). Но учеников пришло 11 и, значит, есть двое, решившие одни и те же задачи. Получили противоречие. Таким образом, задач было предложено не менее 6.

	1	2	3	4	5
1	+	+	+		
2	+	+		+	
3	+	+			+
4	+		+	+	
5	+		+		+
6	+			+	+
7		+	+	+	
8		+	+		+
9		+		+	+
10			+	+	+